

باسمه تعالی

مبارزه علمی برای جوانان زنده کردن روح جستجو و کشف واقعیت ها است

«امام خمینی (ره)»

بیست و هفتمین المپیاد ریاضی کشور

آزمون آزمایشی مرحله اول (اینترنتی و رایگان)

27 دی 1387 (ساعت 9:00 تا 13:00)

مدت آزمون : 4 ساعت

تذکرات:

ضمن آرزوی موفقیت برای شما داوطلب گرامی خواهشمند است به نکات زیر توجه فرمایید

- همانند آزمون اصلی استفاده از ماشین حساب و کامپیوتر برای محاسبه مجاز نیست.
- تعداد سوال ها 30 عدد بوده و 4 ساعت وقت برای پاسخ دادن به آن ها دارید.
- شرایط شرکت در مسابقه و ارسال پاسخ ها در وبلاگ نوشته شده است.
- تا یک ساعت پس از آزمون می توانید پاسخنامه هایتان را ارسال کنید.
- ساعت 14 کلید آزمون را آپلود می کنیم.
- در وبلاگ زمان دقیق اعلام نتایج را می آوریم. تا آن زمان شما می توانید به سوال ها اعتراض کنید (اگر مشکلی داشت) و یا کلید را تصحیح کنید.

با آرزوی موفقیت

مسوولین وبلاگ مینی المپیاد

وبگاه مینی المپیاد

<http://imo.blogfa.com>

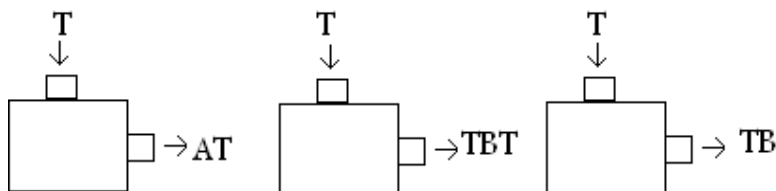
هرگونه حقوق مادی این اثر برای برگزار کنندگان آزمون محفوظ است ولی پیگرد قانونی ندارد!

1- در داستان ها آمده مخترع بازی شطرنج به ازای جایزه از پادشاه زمانه 1- 2^{64} عدد دانه گندم طلب کرد.

تعداد دانه های گندم به کدام عدد نزدیک تر است؟

الف) 1.6×10^{19} (ب) 1.8×10^{19} (ج) 2×10^{19} (د) 2.1×10^{19} (ه) 2.2×10^{19}

2- سه ماشین داریم که ورودی و خروجی آن ها دنباله هستند. هر ماشین کار های زیر را انجام می دهد:



حال اگر ابتدا یک A در دست ما باشد، چند تا از دنباله های زیر را می توان با ماشین بالا ساخت؟

AABABAABABB

ABBABBABBAB

AABABBABABB

BAAABAAABB

ABABBABBBAA

ABABAAABBA

الف) 1 (ب) 2 (ج) 3 (د) 4 (ه) 5

3- اطلاعات زیر در دست است:

AE = 30 km

DC = 90 km

BD = 60 km

EB = 40 km

AC چند کیلومتر است؟

الف) 70 (ب) 100 (ج) 30 (د) 50 (ه) 130

4- یک تاس را به چند طریق می توان با 3 رنگ، رنگ آمیزی کرد که هر خانه ی آن یک رنگ داشته

باشد و هر 2 خانه ی مجاور ضلعی هم رنگ نباشد؟

الف) نمی شود (ب) 1 (ج) 2 (د) 3 (ه) 6

5- دستگاه مقابل چند جواب حقیقی دارد؟

$$\frac{1}{x} + \frac{1}{y} + \frac{1}{z} = 0$$

الف) 1 (ب) 3 (ج) 6 (د) 27 (ه) ندارد

وبگاه مینی المپیا

<http://imo.blogfa.com>

هرگونه حقوق مادی این اثر برای برگزار کنندگان آزمون محفوظ است ولی پیگرد قانونی ندارد!

6- در دنباله ی $S_n = n!n - 1$ که از $n=0$ شروع می شود چند جمله بر 5 بخش پذیر است؟

الف) 1 ب) 2 ج) 3 د) 4 ه) بی نهایت

7- در یک چهار وجهی منتظم مرکز وجوه را به هم وصل می کنیم تا چهار وجهی جدید درون چهار وجهی اصلی پدید آید.

حجم چهار وجهی کوچک تر چند برابر حجم چهار وجهی بزرگ تر است؟

الف) 3^{-1} ب) 9^{-1} ج) 12^{-1} د) 27^{-1} ه) 37^{-1}

8- جزیره ای دایره ای شکل به شعاع 15 km داریم. می خواهیم در آن برجک بسازیم به شرطی که تا شعاع 5 کیلومتری هر برجک آب نباشد و تا شعاع 10 کیلومتری اش برجک دیگری نباشد.

حداکثر تعداد برجکی که در آن می توان ساخت چند است؟

الف) 3 ب) 4 ج) 5 د) 6 ه) 7

9- فرض کنید a ، b و c ریشه های چند جمله ای $x^3 - 3x + 5 = 0$ باشند، $a^3 + b^3 + c^3$ چند است؟

الف) -15 ب) 9 ج) -9 د) 15 ه) 21

10- $6n$ سکه موجود است که دقیقاً 2 تا از آن ها تقلبی است. سکه های سالم هم وزن هستند و وزن دو سکه ی تقلبی با یکدیگر برابر و متفاوت با وزن سکه های سالم است. کمترین تعداد حرکات لازم برای این که مشخص شود سکه های تقلبی سنگین ترند یا سبک تر چند تاست؟ (یک حرکت یک بار استفاده از ترازوی دو کفه ای است که حق استفاده از وزنه وجود ندارد و تنها می توان دو دسته سکه را با هم مقایسه کرد.)

الف) 2 ب) 3 ج) 4 د) 6 ه) بستگی به n دارد

11- تعداد جواب های $2^n \equiv 9 \pmod{35}$ برای $0 \leq n \leq 100$ چند تاست؟

الف) 0 ب) 3 ج) 5 د) 8 ه) 10

وبگاه مینی المپیاد

<http://imo.blogfa.com>

هرگونه حقوق مادی این اثر برای برگزار کنندگان آزمون محفوظ است ولی پیگرد قانونی ندارد!

12- $5x+6y = n$ برای چند n که $0 \leq n \leq 30$ در اعداد صحیح نامنفی جواب دارد؟

الف) 16 ب) 17 ج) 19 د) 21 ه) 22

13- معادله $3^x - y^3 = 1$ در اعداد صحیح چند جواب دارد؟

الف) 0 ب) 1 ج) 2 د) 3 ه) 4

14- در مثلث ABC زاویه C 30 درجه است و زاویه B 15 درجه. اگر $AC = \sqrt{3}$ باشد و D

روی BC طوری انتخاب شود که AD بر AB عمود باشد، در این صورت BD برابر است با:

الف) $\sqrt{6}$ ب) $\sqrt{2} + \sqrt{3}$ ج) $2\sqrt{3}$ د) $\sqrt{10}$ ه) $2\sqrt{6}$

15- 20 نوازنده بعد از اجرای موسیقی خود از سوی 9 داور مورد ارزیابی قرار گرفتند. هر داور آن ها را

به ترتیب مقام، در یک لیست 20 نفره از اول تا بیستم قرار می دهند. اختلاف مقام هایی که داوران مختلف

برای هر هنرمند تعیین کرده اند بیش تر از 3 نیست. مقام های هر هنرمند را جمع کرده اند و عدد های

حاصل را به ترتیب صعودی نوشته اند. ترتیب $a_1 \leq a_2 \leq a_3 \leq \dots \leq a_{20}$ به دست آمد. داوران روی هم به نفر

اول حداکثر چه عددی داده اند؟

الف) 9 ب) 180 ج) 22 د) 24 ه) 25

16- با ارقام 1، 2، 3، ... و 8 چند عدد هشت رقمی مضرب 11 می توان نوشت؟ (همه ی ارقام 1، 2،

3، ... و 8 ظاهر شوند.)

الف) 1152 ب) 2304 ج) 3456 د) 4608 ه) 4806

17- اعداد 1 تا 64 را در یک جدول 8×8 نوشته ایم به طوری که هر دو عدد متوالی در دو خانه ی

مجاور از جدول قرار دارند. کمترین مجموع مقادیر بر روی یک قطر از مربع 8×8 را حساب کنید.

الف) 36 ب) 64 ج) 88 د) 89 ه) 256

18- فرض کنید $f: N \rightarrow N$ تابعی باشد که $f(f(n)) = 2n$ اگر $f(1) = 3$ آنگاه $f(24)$ چند است؟

الف) 24 ب) 16 ج) 18 د) 12 ه) 32

وبگاه مینی المپیاد

<http://imo.blogfa.com>

هرگونه حقوق مادی این اثر برای برگزار کنندگان آزمون محفوظ است ولی پیگرد قانونی ندارد!

19- روی یک صفحه یک m ضلعی و یک n ضلعی محدب داده شده است ($m > n$). این دو چند ضلعی صفحه را حداکثر به چند ناحیه تقسیم می کنند؟

الف) $m+n$ ب) $2n$ ج) $2(n+1)$ د) $2(m+n)$ ه) هیچ کدام

20- حداکثر چند زیر مجموعه از $A = \{1, 2, \dots, 20\}$ می توان انتخاب کرد به طوری که برای هر دو زیر مجموعه X و Y داشته باشیم: $X \cup Y = A$

الف) 29 ب) 20 ج) 21 د) 22 ه) 26

21- $2^p + 3^p = y^2$ چند جواب دارد؟ (p اول و y صحیح)

الف) صفر ب) 1 ج) 2 د) 3 ه) 4

22- چند جفت $a, b \leq 50$ هست که a بر b و همچنین $a+1$ بر $b+1$ بخش پذیر باشد؟ (a و b طبیعی)

الف) 90 ب) 91 ج) 89 د) 88 ه) 92

23- در مثلث ABC از نقطه M دلخواه بر روی ضلع BC به A و AE را روی ضلع AB مساوی با AM جدا می کنیم. اگر زاویه $MAC = 45^\circ$ درجه باشد آنگاه زاویه BME چند درجه است؟

الف) 45 ب) 22.5 ج) 36 د) 30 ه) 37

24- فرض کنید ABC مثلث حاده الزاویه با نیمسازهای CM و BL باشد. نقطه K روی ضلع BC به گونه ای قرار دارد که مثلث KLM متساوی الاضلاع است. زاویه A چند درجه است؟

الف) 60 ب) 90 ج) 120 د) 150 ه) به طور یکتا معلوم نیست

25- نیمسازهای داخلی مثلث ABC دایره I محیطی آن را در نقاط A', B', C' قطع می کنند. اگر I' مرکز دایره $A'B'C'$ باشد، اندازه I زاویه $B'I'C'$ برابر کدام گزینه است؟

الف) $90 + (B+C)/2$ ب) $180 - (B+C)/2$ ج) $2A+B-C$ د) $2A$ ه) $(A-B)/2$

وبگاه مینی المپیاد

<http://imo.blogfa.com>

هرگونه حقوق مادی این اثر برای برگزار کنندگان آزمون محفوظ است ولی پیگرد قانونی ندارد!

26- ضرایب چند جمله ای P صحیح است. تحت کدام یک از شرایط P نمی تواند ریشه ی صحیح داشته باشد؟

الف) $P(5)=5, P(6)=6$ ب) $P(5)=5, P(6)=5$ ج) $P(5)=6, P(6)=6$ د) $P(5)=6, P(6)=5$ ه) با همه می تواند

27- به چند طریق می توان مثلث هایی با زوایای داخلی a, b و c انتخاب کرد که اندازه ی زوایای ممکن آن ها 1, 2, 3, ...، 178 (همگی برحسب «درجه») باشد و مثلث های هم ارز به وجود نیاید؟

الف) 675 ب) 1075 ج) 1980 د) 2700 ه) 2775

28- چهارم تیر سال 1344، تاریخ را اینگونه می نویسیم: $44/4/4$ - در یک قرن چند مرتبه ممکن است این اتفاق بیافتد که با یک رقم بتوان تاریخ را نشان داد؟! (در جواب دادن دقت کنید! در ضمن 1305 را 05 می گیریم نه 5 خالی و الخ!)

الف) 11 ب) 13 ج) 15 د) 17 ه) 19

29- یک توده ی سنگریزه داریم. دو نفر بازی می کنند، هر کس می تواند 1، 2 و یا 3 سنگریزه بردارد. در چند تا از حالت های زیر نفر اول برنده است؟ (منظور از هر حالت تعداد سنگریزه ی اولیه است!)

3, 1368, 1387, 2008, 2000, 1990

الف) 2 ب) 3 ج) 4 د) 5 ه) 6

30- دستگاه معادلات زیر را ببینید:

$$\begin{aligned}x + 11y + 21z + 31t + 41u + 51v + 61w &= 77 \\2x + 12y + 22z + 32t + 42u + 52v + 62w &= 84 \\3x + 13y + 23z + 33t + 43u + 53v + 63w &= 91 \\4x + 14y + 24z + 34t + 44u + 54v + 64w &= 98 \\5x + 15y + 25z + 35t + 45u + 55v + 65w &= 105 \\6x + 16y + 26z + 36t + 46u + 56v + 66w &= 112 \\7x + 17y + 27z + 37t + 47u + 57v + 67w &= 119\end{aligned}$$

عبارت زیر معادل چند است؟

$$80x + 81y + 82z + 83t + 84u + 85v + 86w = ?!!!$$

الف) 81 ب) 243 ج) 401 د) 567 ه) 729

وبگاه مینی المپیاد

<http://imo.blogfa.com>

هرگونه حقوق مادی این اثر برای برگزار کنندگان آزمون محفوظ است ولی پیگرد قانونی ندارد!